Théorème : (Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$. Alors, $c_{|m|}(f) \xrightarrow[|m|\to+\infty]{} 0$. $(m \in \mathbb{Z})$

Preuve : Prouvons le théorème en traitant 2 cas :

1) Si $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$, alors, $\forall m \neq 0$, on réalise une intégration par parties : $c_m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[f(x)\frac{e^{-imx}}{-im}\right]_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{1}{im}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-imx}dx$.

Donc, $\forall m \neq 0$, $|c_m(f)| \leq \frac{\|f'\|_\infty}{m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$. ($\|f'\|_\infty < +\infty$ car $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$)

- Regardons alors le cas général où $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$. Par densité de $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ dans $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ tel que $\|f-\varphi\|_{L^1_{2\pi}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons ε et une telle fonction φ : comme $c_m(\varphi) \xrightarrow[|m|\to+\infty]{} 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall |m| \geq N$, $c_m(\varphi) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Enfin, $\forall |m| \geq N$, on a :

$|c_m(f)| \leq |c_m(f)-c_m(\varphi)| + |c_m(\varphi)| \overset{\text{linéarité de l'intégrale}}{=} |c_m(f-\varphi)| + |c_m(\varphi)| \leq \|f-\varphi\|_{L^1_{2\pi}} + |c_m(\varphi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc, $\lim_{|m|\to+\infty} c_m(f) = 0$. □

Théorème : On note $D_N = \sum_{m=-N}^{N} e_m$ où $e_m(t) = e^{imt}$, $t \in \mathbb{R}$, le noyau de Dirichlet d'ordre N. Alors, $\forall N \in \mathbb{N}$,

1) D_N est une fonction paire, 2π-périodique et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = 1$.

2) D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction $g : t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longmapsto \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$.

3) $\forall f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a $S_N(f) = f * D_N$.

Preuve : 1) D_N est clairement paire et 2π-périodique. De plus, $c_0(D_N) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt$ par définition de $c_0(D_N)$ et $c_0(D_N) = 1$ par définition de D_N.

Donc, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = 1$. On a prouvé par ailleurs ici que $D_N \in L^1_{2\pi}$.

2) Si $e^{it} = 1$, alors $D_N(t) = 2N+1$ et $t \in 2\pi\mathbb{Z}$. Si $e^{it} \neq 1$, $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et on a $D_N(t) = \sum_{m=-N}^{N} e^{imt} = e^{-iNt}\sum_{m=0}^{2N} e^{imt} = e^{-iNt}\,\frac{1-e^{i(2N+1)t}}{1-e^{it}}$

$= \underbrace{e^{-iNt}\,\frac{e^{it(2N+1)/2}}{e^{it/2}}}_{=1}\,\frac{\left(e^{-it(2N+1)/2}+e^{it(2N+1)/2}\right)}{\left(e^{-it/2}+e^{it/2}\right)} = \frac{\sin((2N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} \xrightarrow[t\to 0]{} 2N+1 = D_N(0)$. g se prolonge donc par continuité en $t=0$ et donc se prolonge à $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, par 2π-périodicité.

$\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} = \frac{\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)-0}{t-0}}{\frac{\sin(t/2)-0}{t-0}} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{N+\frac{1}{2}\cos(0)}{\frac{1}{2}\cos(0)} = 2N+1$.

3) On a $f * D_N \overset{\text{intervertion somme finie} \leftrightarrow \text{intégrale finie}}{=} \sum_{m=-N}^{N}(f * e_m) = \sum_{m=-N}^{N} c_m(f)e_m = S_N(f)$. □

$f * e_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)e^{im(x-y)}\,dy = \frac{1}{2\pi}e^{imx}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-imy}\,dy = c_m(f)e^{imx} = c_m(f)e_m(x)$

MADE WITH Scanner App

Des 2 Théorèmes

Application: (Principe de localisation) Soient $f, g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ telles que $f(x)=g(x)$ pour $x \in]x_0-\delta ; x_0+\delta[$, $\delta > 0$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0)-S_n(g)(x_0) = 0$.

Preuve: Par parité de D_n, on a $S_n(f)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} D_n(t)\,dt$. Donc, en posant $h(t) = \frac{1}{2}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)-g(x_0+t)-g(x_0-t)\right]$, on a

$S_n(f)(x_0) - S_n(g)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t) D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(t) D_n(t)\,dt$ (par parité de h et D_n) $\overset{\text{si } \delta<\pi}{=} \frac{1}{\pi}\int_\delta^{\pi} h(t) D_n(t)\,dt$ (car $h(t)=0 \ \forall |t|<\delta$)

Si $\delta \geq \pi$, on a directement $S_n(f)(x_0)-S_n(g)(x_0)=0$

$= \frac{1}{\pi}\int_\delta^{\pi} \frac{h(t)}{\sin(\frac{t}{2})} \sin((n+\frac{1}{2})t)\,dt$. On va montrer que $\left[t \longmapsto 1_{]\delta;\pi]}(t)\,\frac{h(t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right] \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$: On a $\delta \leq \pi$, donc $\left[t \longmapsto \sin(\frac{t}{2})\right]$ est croissante sur $[\delta;\pi]$ et $\int_\delta^{\pi} \left|\frac{h(t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right| dt \leq \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\int_\delta^{\pi} |h(t)|\,dt < +\infty$ car $f, g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$. Ainsi, en appliquant Riemann-Lebesgue, on a:

$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) - S_n(g)(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_\delta^{\pi} h(t) D_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{\pi}\int_\delta^{\pi} \frac{h(t)}{\sin(\frac{t}{2})} e^{-i(n+\frac{1}{2})t}\,dt\right) = 0$. □

On l'utilise ici

Référence: Analyse de Fourier, El Amrani (La preuve de Riemann-Lebesgue est une version adaptée de celle du livre)

Leçons: 234 - 241 - 246 J'ai pas réfléchis à si ce dev allait dans plus de leçons j'avoue. Peut-être la 228?

Remarques: - Dev qui ne demande pas de prérequis étant donné que l'on démontre tout, c'est sympa. La seule partie un peu technique est la fin de la preuve de l'application.

- Il faut savoir prouver .

Dans l'application, $S_n(f)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} D_n(t)\,dt$.

Preuve: . $S_n(f)(x_0) = f * D_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-t) D_n(t)\,dt$

. $S_n(f)(x_0) = f * D_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x_0-t)\,dt \overset{\text{parité de } D_n}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x_0)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(t+x_0) D_n(t)\,dt \overset{f\ 2\pi\text{-périodique}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x_0) D_n(t)\,dt$.

Donc, $S_n(f)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} D_n(t)\,dt$. □

MADE WITH Scanner App